

me
mo
RIX

AREA
scientifica

Matematica | 1

insiemi numerici, algebra letterale, equazioni,
sistemi e geometria euclidea





memorix

Matematica 1

insiemi numerici, algebra letterale,
equazioni, sistemi e geometria euclidea

Memorix - Matematica 1

Copyright © 2018, 2011, EdiSES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2022 2021 2020 2019 2018

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione,
anche parziale, del presente volume o di parte di
esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Grafica di copertina:

 curvilinee

Progetto grafico:

ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

Fotocomposizione:

Edises S.r.l. – Napoli

Stampato presso:

Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

per conto della

EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 9362 173 1

www.edises.it
info@edises.it

Chiari nell'esposizione, esaurienti nei contenuti, gradevoli nella grafica, i Memorix si propongono di agevolare – come il nome stesso suggerisce – il processo di memorizzazione, stimolando nel lettore sia l'attenzione visiva sia la capacità di associazione tra concetti, così da “trattenerli” più a lungo nella mente. Schemi, uso frequente di elencazioni e neretti, parole-chiave, curiosità, brevi raccordi interdisciplinari, test di verifica a fine capitolo: ecco le principali caratteristiche di questi tascabili.

Utili per apprendere rapidamente i concetti base di una disciplina o per ricapitolarne gli argomenti principali, i libri della collana Memorix si rivolgono agli studenti della scuola superiore, a chi ha già intrapreso gli studi universitari, a quanti si accingono ad affrontare un concorso. Ma anche a tutti coloro che vogliono riappropriarsi di conoscenze che la mancanza di esercizio ha affievolito o semplicemente vogliono farsi un'idea su materie che non hanno fatto parte della propria esperienza scolastica o, ancora, vogliono avere a portata di mano uno strumento da consultare velocemente all'occorrenza.

Eventuali aggiornamenti o *errata corrige* saranno resi disponibili online (www.edises.it) in apposite sezioni della scheda del volume.

Potete segnalarci i vostri suggerimenti o sottoporci le vostre osservazioni all'indirizzo redazione@edises.it

Il volume ripercorre tutti gli argomenti relativi alle operazioni nei diversi insiemi numerici, al calcolo letterale, alle equazioni e ai sistemi di equazioni di primo grado e allo studio dei concetti basilari della geometria euclidea. La trattazione è caratterizzata da un uso frequente di esempi pratici a cui segue la generalizzazione dei relativi concetti.

Il rispetto della propedeuticità delle nozioni basilari riesce ad orientare costantemente il lettore. La presentazione formale e simbolica degli argomenti è sempre affiancata da parti discorsive che espongono in modo intuitivo i concetti teorici.

Il volume affronta anche la logica delle proposizioni e i sistemi di numerazione, fornendo al lettore spunti importanti per la comprensione del funzionamento dei moderni elaboratori elettronici.

Particolare enfasi è posta sulla risoluzione degli esercizi e sull'applicazione dei concetti formalizzati.

Sommario

1. Gli insiemi

1.1.	Definizione	1
1.2.	Operazioni tra insiemi	1
1.3.	Coppia ordinata e prodotto cartesiano	5
1.4.	Relazione binaria	5
1.5.	Relazioni in un insieme	7
1.5.1.	Relazione di equivalenza	7
1.5.2.	Relazione d'ordine largo	8
1.5.3.	Relazione d'ordine stretto	9
1.5.4.	Relazione d'ordine totale e parziale	10
1.6.	Funzioni	10
1.6.1.	Caratteristiche di una funzione	10
1.6.2.	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive	11

<i>Test di verifica</i>		14
-------------------------	--	----

2. I numeri naturali

2.1.	L'insieme dei numeri naturali	19
2.2.	Addizione tra numeri naturali	22
2.3.	Sottrazione tra numeri naturali	23
2.4.	Moltiplicazione tra numeri naturali	24
2.5.	Divisione tra numeri naturali	26
2.6.	Potenza di un numero naturale	29
2.7.	Espressioni con i numeri naturali	31
2.8.	Scomposizione in numeri primi	33
2.9.	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo	35

<i>Test di verifica</i>		37
-------------------------	--	----

3. I sistemi di numerazione

3.1.	Sistema di numerazione decimale	43
3.2.	Sistema di numerazione binario	44
3.3.	Sistema di numerazione esadecimale	47

<i>Test di verifica</i>		50
-------------------------	--	----

4. I numeri interi relativi

4.1. Ampliamento di un insieme numerico	53
4.2. Ampliamento dell'insieme dei numeri naturali	53
4.3. Relazioni di disuguaglianza e valore assoluto	55
4.4. Addizione di numeri interi relativi	56
4.5. Sottrazione di numeri interi relativi	58
4.6. Moltiplicazione di numeri interi relativi	60
4.7. Divisione di numeri interi relativi	61
4.8. Potenza di numeri interi relativi	62
4.9. Espressioni con i numeri interi relativi	63
<i>Test di verifica</i>	65

5. I numeri razionali

5.1. L'insieme dei numeri razionali assoluti come ampliamento dei numeri naturali	69
5.2. Tipi di frazioni e frazioni equivalenti	71
5.3. Proprietà invariante e semplificazione di frazioni	73
5.4. Riduzione di frazioni a denominatore comune	74
5.5. Confronto tra numeri frazionari	75
5.6. Numeri decimali e frazioni generatrici	76
5.7. Percentuali	80
5.8. Proporzioni	81
5.8.1. Proprietà delle proporzioni	82
5.9. Problemi risolvibili con le proporzioni	86
5.9.1. Proporzionalità diretta	86
5.9.2. Proporzionalità inversa	88
5.10. L'insieme dei numeri razionali come ampliamento dei numeri interi relativi	89
5.11. Addizione e sottrazione di frazioni	91
5.12. Moltiplicazione di frazioni	92
5.13. Divisione di frazioni	95
5.14. Potenza di frazioni	96
5.15. Espressioni con i numeri razionali	97
<i>Test di verifica</i>	99

6. Logica

6.1. Proposizioni e connettivi logici	105
---------------------------------------	-----

6.2.	La negazione “non”	107
6.3.	La congiunzione “e”	108
6.4.	La disgiunzione inclusiva “o”	109
6.5.	La disgiunzione esclusiva “o... o...”	110
6.6.	L’implicazione materiale “se... allora...”	111
6.7.	La doppia implicazione “... se e solo se...”	112
6.8.	Espressioni logiche	113
	<i>Test di verifica</i>	116

7. Monomi e polinomi

7.1.	Definizione e caratteristiche di un monomio	121
7.2.	Operazioni con i monomi	122
7.2.1.	Somma algebrica	122
7.2.2.	Prodotto	123
7.2.3.	Potenza	123
7.2.4.	Divisione	124
7.2.5.	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di monomi	125
7.3.	Definizione e caratteristiche di un polinomio	126
7.4.	Operazioni con i polinomi	128
7.4.1.	Somma	128
7.4.2.	Differenza	129
7.4.3.	Prodotto di un monomio per un polinomio	130
7.4.4.	Prodotto di polinomi	131
7.4.5.	Divisione di un polinomio per un monomio	132
7.4.6.	Divisione di polinomi	133
7.4.7.	Regola di Ruffini	139
7.5.	Prodotti notevoli	143
7.5.1.	Somma di due monomi per la loro differenza	143
7.5.2.	Quadrato di binomio	144
7.5.3.	Quadrato di trinomio	146
7.5.4.	Cubo di binomio	147
7.5.5.	Generica potenza di un binomio	148
	<i>Test di verifica</i>	151

8. Fattorizzazione di polinomi

8.1.	Raccoglimento a fattore comune totale	165
------	---------------------------------------	-----

8.2.	Raccoglimento a fattor comune parziale	166
8.3.	Fattorizzazione mediante prodotti notevoli	167
8.3.1.	Differenza di quadrati	167
8.3.2.	Quadrato di binomio	168
8.3.3.	Quadrato di trinomio	169
8.3.4.	Cubo di binomio	170
8.4.	Somma e differenza di cubi	171
8.5.	Somma e differenza di generiche potenze di monomi	172
8.6.	Fattorizzazione dei trinomi di secondo grado	174
8.7.	Fattorizzazione mediante la regola di Ruffini	176
8.7.1.	Gli zeri di un polinomio	176
8.7.2.	Fattorizzazione di un polinomio	178
	<i>Test di verifica</i>	184

9. Frazioni algebriche

9.1.	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi	191
9.2.	Definizione di frazione algebrica	193
9.3.	Potenze con esponenti negativi e frazioni algebriche	195
9.4.	Condizione di esistenza	195
9.5.	Semplificazione	198
9.6.	Moltiplicazione	201
9.7.	Divisione e frazione con termini frazionari	203
9.8.	Elevamento a potenza	205
9.9.	Somma algebrica	205
	<i>Test di verifica</i>	208

10. Equazioni di primo grado

10.1.	Definizione e tipi di equazione	213
10.2.	I principi di equivalenza	214
10.3.	Problemi risolvibili con equazioni di primo grado	217
10.4.	Equazioni letterali di primo grado	220
	<i>Test di verifica</i>	223

11. Sistemi di equazioni di primo grado

11.1.	Generalità	227
11.2.	Sistemi di equazioni di primo grado in due incognite	227
11.2.1.	Metodo di Cramer	228

11.2.2.	Metodo di Sostituzione	230
11.2.3.	Metodo di Riduzione (o Eliminazione)	231
11.2.4.	Metodo del Confronto	233
11.3.	Sistemi di equazioni di primo grado in tre incognite	234
11.3.1.	Metodo di Sostituzione	234
11.3.2.	Regola di Sarrus	235
11.4.	Problemi risolvibili con sistemi di equazioni di primo grado	237
	<i>Test di verifica</i>	242
12.	Geometria euclidea nel piano	
12.1.	Enti primitivi e postulati	247
12.2.	Enti fondamentali	249
12.3.	La congruenza	252
12.3.1.	Confronto tra segmenti	252
12.3.2.	Confronto e somma di angoli	253
12.4.	Il triangolo	255
12.5.	Bisettrice, mediana e altezza di un triangolo	256
12.6.	Classificazione dei triangoli	257
12.6.1.	In base ai lati	257
12.6.2.	In base agli angoli	258
12.7.	Criteri di congruenza dei triangoli	258
12.8.	Relazioni tra lati e angoli di un triangolo	260
12.9.	I poligoni	260
12.10.	Rette perpendicolari e parallele	261
12.11.	Proprietà degli angoli di un poligono	263
12.11.1.	Teorema dell'angolo esterno	263
12.11.2.	Somma degli angoli interni di un triangolo	264
12.11.3.	Somma degli angoli interni di un poligono	264
12.12.	Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli	265
12.13.	Quadrilateri	265
12.13.1.	Il parallelogramma	265
12.13.2.	Il rettangolo, il rombo e il quadrato	266
12.13.3.	Il trapezio	267
12.14.	Fasci di rette parallele tagliati da trasversali	268
12.15.	Luogo geometrico e asse di un segmento	269
12.16.	Circonferenza	269
12.17.	Poligoni inscritti in una circonferenza	272

12.18. Posizioni reciproche di retta e circonferenza	273
12.19. Posizioni reciproche di due circonferenze	274
12.20. Angoli alla circonferenza	276
12.21. Punti notevoli di un triangolo	277
12.22. Quadrilateri inscrittibili e circoscrivibili	280
12.23. Poligoni regolari	281
<i>Test di verifica</i>	282

1. Gli insiemi

I punti-chiave

- > Rappresentazione grafica degli insiemi.
- > Le principali operazioni tra gli insiemi.
- > Caratteristiche delle relazioni e delle funzioni.

1.1. Definizione

Il concetto di insieme costituisce l'elemento fondante di quella parte della matematica che è la teoria degli insiemi. Con questo termine si indica ogni raggruppamento, collezione, aggregato di elementi, indipendentemente dalla loro natura.

Un **diagramma di Eulero-Venn** (o semplicemente diagramma di Venn) è una rappresentazione grafica di un insieme che consiste nel racchiuderne gli elementi all'interno di una linea chiusa non intrecciata (Figura 1-1).

In Figura 1-1 l'insieme A è composto dagli elementi indicati con a , b , c , d ; questo viene indicato con la notazione $A = \{a, b, c, d\}$. In riferimento ad un singolo elemento dell'insieme, la notazione $a \in A$ indica che l'elemento a "appartiene" all'insieme A . Inoltre, gli elementi b e c appartengono all'insieme A' che è contenuto in A (la notazione usata è la seguente $A' \subset A$). Per tale motivo A' è detto "sottoinsieme di A ".

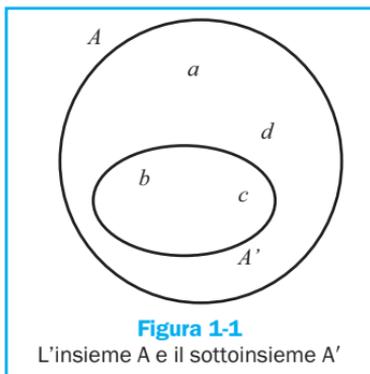


Figura 1-1

L'insieme A e il sottoinsieme A'

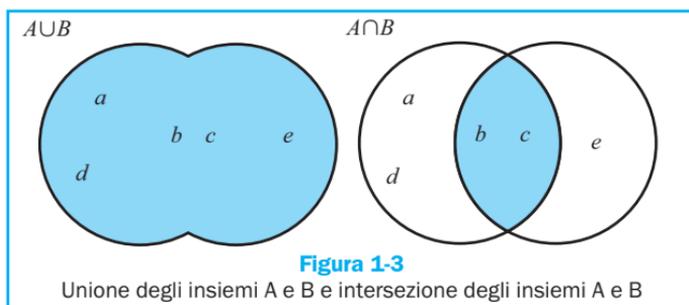
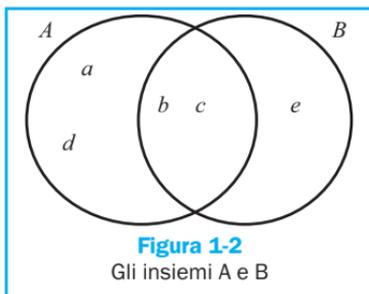
1.2. Operazioni tra insiemi

Si considerano i due insiemi, mostrati in Figura 1-2, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, c, e\}$.

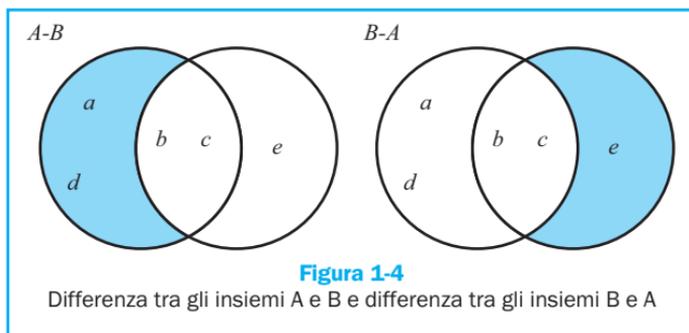
L'**unione** tra i due insiemi è costituita da tutti gli elementi che si pos-

sono trovare in A , in B o in entrambi. L'unione viene indicata con $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

Invece, l'**intersezione** tra due insiemi è composta solo da quegli elementi presenti in entrambi gli insiemi. Si indica l'intersezione con $A \cap B = \{b, c\}$.



La **differenza** tra A e B (indicata con $A - B$) è costituita da tutti gli elementi presenti in A a cui vengono sottratti quelli presenti anche in B . Nel caso in questione $A - B = \{a, d\}$. La differenza tra A e B è anche detta **complemento** di B rispetto ad A . Si ha inoltre $B - A = \{e\}$.



L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** ed è indicato con il simbolo \emptyset . L'insieme vuoto è per definizione incluso in qualsiasi insieme A .

Infine, si sottolinea come dalla Figura 1-3 e dalla Figura 1-4 si deduce la seguente regola generale:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$$

L'unione degli insiemi A e B è data dall'unione di tre insiemi: l'intersezione di A e B , il complemento di B rispetto ad A e il complemento di A rispetto a B . Difatti un elemento dell'insieme $A \cup B$ può appartenere o a entrambi gli insiemi (l'intersezione), o al solo insieme A (differenza $A - B$) oppure al solo insieme B (differenza $B - A$).

Si propone lo svolgimento di alcuni quesiti.

Esempi 1) Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5\}$, determinare gli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.

L'insieme intersezione è dato dagli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi:

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincide con l'insieme B . In effetti, B è un sottoinsieme di A .

L'insieme unione è dato dagli elementi che sono in A , in B oppure in entrambi.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Si noti come questo insieme coincide con l'insieme A .

L'insieme differenza $A - B$ è dato da:

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

L'insieme differenza $B - A$ coincide con l'insieme vuoto, in quanto da B vengono rimossi tutti gli elementi ad esso appartenenti:

$$B - A = \emptyset$$

2) Dati gli insiemi A e B tali che $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, determinare gli insiemi A , $A - B$ e $B - A$.

L'insieme $B - A = B - (A \cap B)$, in quanto togliere dall'insieme B tutti gli elementi di A è equivalente a togliere i soli elementi che B ha in comune con A . Quindi:

$$B - A = \{2, 6\}$$

Se dall'insieme $A \cup B$ si tolgono gli elementi di $A \cap B$ e di $B - A$, si ottengono i soli elementi dell'insieme $A - B$. Quindi:

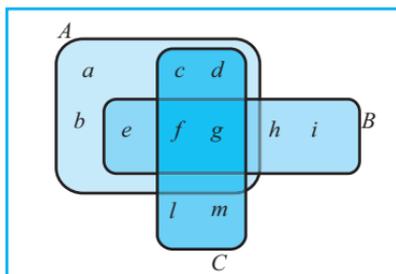
$$A - B = \{4, 7\}$$

Infine, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, ossia gli elementi di A sono quelli che appartengono solo ad A oppure ad A e B contemporaneamente. Quindi:

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

3) Dato il diagramma di Venn in figura, determinare i seguenti insiemi:

$$A \cap B \cap C, \quad A \cap C, \quad (A \cap C) - (B \cap C), \quad B - C.$$



Osservato il diagramma, si ottiene:

$$A \cap B \cap C = \{f, g\}$$

$$A \cap C = \{c, d, f, g\}$$

Inoltre, siccome $B \cap C = \{f, g\}$, allora $(A \cap C) - (B \cap C) = \{c, d\}$.

$$B - C = \{e, h, i\}$$

3. I sistemi di numerazione

I punti-chiave

- Modalità di rappresentazione di un numero in un sistema di numerazione.
- I principali sistemi di numerazione: decimale, binario ed esadecimale.
- Conversione di un numero tra sistemi di numerazione.

3.1. Sistema di numerazione decimale

I numeri naturali sono tutti scritti mediante 10 cifre che sono

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Il sistema mediante il quale vengono espressi i numeri è detto sistema di numerazione e quello utilizzato mediante le dieci cifre appena presentate è di tipo **posizionale**.

In un sistema di numerazione posizionale, nell'esprimere il valore di un numero, contano le cifre che lo compongono e anche le loro posizioni.

Ad esempio, la stessa cifra 3 esprime valori diversi nei numeri 63, 31 e 350. Nel primo numero il 3 esprime il numero di unità che compongono il 63. Nel secondo numero la cifra 3 esprime quante decine compongono il 31, ossia 3 decine. Infine, nel terzo numero la cifra 3 esprime il numero di centinaia che compongono il 350, ossia 3 centinaia.

Da tale ragionamento si comprende che la prima cifra da destra di un generico numero esprime le unità, la seconda cifra da destra esprime le decine, la terza esprime le centinaia, la quarta le migliaia e così via.

Ad esempio, il numero 365 può essere scritto mediante una somma di centinaia, decine e unità, ossia:

$$365 = 300 + 60 + 5$$

In particolare si può anche scrivere:

$$365 = 3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Si noti che 100, 10 e 1 sono delle potenze del numero 10. Infatti $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ e $1 = 10^0$; pertanto si può scrivere:

$$365 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Quindi il numero 365 può essere espresso mediante delle potenze di base 10; pertanto il sistema di numerazione utilizzato per esprimere i numeri naturali è detto **decimale** oppure **in base 10**. Il numero 10 è detto **base** del sistema di numerazione.

Si propongono altri esempi:

$$2041 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$12543 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Si noti che le cifre del numero decimale non sono altro che i coefficienti moltiplicativi delle potenze di 10 mediante le quali si può esprimere il valore del numero.

Infine è importante notare che il sistema di numerazione decimale (in base 10) adopera, per esprimere i numeri, proprio 10 cifre.

Più in generale si può pensare a un generico sistema di numerazione posizionale in base n . In tale sistema i numeri sono espressi come potenze in base n e vengono scritti utilizzando n cifre.

3.2. Sistema di numerazione binario

Il sistema di numerazione binario è un sistema posizionale in base 2 ed è alla base del funzionamento dei computer. In un sistema di questo tipo i numeri vengono espressi con due sole cifre. Nel caso del sistema binario le cifre sono 0 e 1.

Quindi, un generico numero binario verrà scritto come sequenza di 1 e 0 e verrà letto da sinistra verso destra pronunciando “zero” oppure “uno”, a seconda della cifra incontrata.

Alcuni esempi di numeri binari sono i seguenti:

101

1100

101101

Solo il numero 0 e il numero 1 del sistema decimale trovano corri-

spondenza in numeri scritti allo stesso modo nel sistema binario. In Tabella 3-1 sono mostrate le conversioni binario-decimale di alcuni numeri naturali.

Tabella 3-1

Decimale	Binario	Decimale	Binario
0	0	6	110
1	1	7	111
2	10	8	1000
3	11	9	1001
4	100	10	1010
5	101	11	1011

Per convertire un numero binario in un numero decimale non si deve far altro che ricordare che le cifre del numero binario sono i coefficienti delle potenze di 2, così come le cifre di un numero decimale erano i coefficienti moltiplicativi delle potenze di 10.

Pertanto il numero 1100 ha valore pari a:

$$1100 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Calcolando le potenze e i prodotti si determina a quale numero decimale corrisponde il numero 1100.

$$\begin{aligned} 1100 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = \\ &= 8 + 4 + 0 + 0 = 12 \end{aligned}$$

Quindi il numero 1100 del sistema binario corrisponde al numero 12 del sistema decimale.

Questa uguaglianza si può scrivere nel modo seguente:

$$(1100)_2 = (12)_{10}$$

Ossia il numero 1100 (espresso in base 2) corrisponde al numero 12 (espresso in base 10).

Si propone qualche altro esempio.

Esempi 1) Convertire il numero 10101 nel sistema decimale.

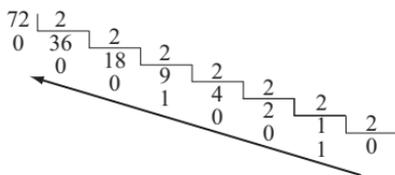
$$10101 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21$$

2) Convertire il numero 1111 nel sistema decimale.

$$1111 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

Per convertire un numero decimale in un binario occorre dividere ripetutamente il numero per 2 e raccogliere i resti ottenuti nelle divisioni. Difatti il resto di una divisione per 2 può essere solo pari a 0 oppure a 1.

Si illustra la procedura nel dettaglio, convertendo il numero decimale 72 nel sistema binario.



Si divide 72 per 2, il quoziente è pari a 36 ed il resto è 0. Di seguito si divide 36 per 2, ottenendo 18 con il resto di 0. Si procede con le divisioni fino a ottenere un quoziente pari ad 1. Si divide tale quoziente unitario per 2 ottenendo un quoziente pari a 0 e un resto pari ad 1 e si terminano le divisioni.

A questo punto si considerano i resti in ordine inverso rispetto a come sono stati ottenuti durante le divisioni (dall'ultimo resto fino al primo). A tale proposito si noti la freccia il cui verso va dal basso verso l'alto e da destra verso sinistra. Si ottiene quindi la seguente sequenza di resti: 1001000. Questa sequenza di cifre pari a 1 e 0 rappresenta il numero 72 nel sistema binario.

$$\text{Quindi } (72)_{10} = (1001000)_2.$$

6. Logica

I punti-chiave

- > Uso dei connettivi logici.
- > Tabelle di verità dei connettivi logici.
- > Definizione delle tabelle di verità di espressioni logiche.

6.1. Proposizioni e connettivi logici

Una **proposizione semplice** è un enunciato la cui verità può essere stabilita in modo oggettivo. Pertanto una proposizione può essere **vera** o **falsa**. Le proposizioni studiate in logica non sono quindi come tutte le proposizioni usate nel linguaggio comune: di esse si deve poter stabilire in modo univoco la verità. Le proposizioni vengono indicate con le lettere maiuscole dell'alfabeto.

Esempi 1) La proposizione $A =$ "I multipli di 2 sono numeri pari" è univocamente riconosciuta come vera. Pertanto essa può essere considerata nello studio della logica. La proposizione $B =$ "Tutti i numeri dispari sono divisibili per 3" è falsa in quanto si può stabilire oggettivamente che esistono numeri dispari, come 5 oppure 7, che non sono divisibili per 3.

2) È possibile stabilire la verità anche di proposizioni non strettamente di natura matematica. Ad esempio, la proposizione $C =$ "Roma è la capitale d'Italia" è una proposizione di cui è possibile stabilire la verità; in particolare si sa che essa è vera. Pertanto C può essere oggetto di studio in logica.

3) La proposizione $D =$ "Venezia è la città più bella del mondo" non può essere oggetto di studio in logica, in quanto non si può stabilire univocamente se essa sia vera oppure falsa. La verità di tale proposizione è lasciata all'opinione di ciascun individuo. Molti saranno concordi nell'affermare che D è vera, ma qualcuno potrebbe essere contrario a tale opinione; inoltre non vi è un metodo oggettivo per stabilire se D sia vera oppure no.

4) Tutte le proposizioni del linguaggio parlato espresse con verbi al futuro, tutte le proposizioni interrogative o le esclamazioni o i comandi non possono essere considerate proposizioni vere oppure false in assoluto. Pertanto non saranno oggetto di studio proposizioni del tipo “Viva l’Italia”, “Mi prendi il sale!”, “Quanti anni hai?” e “Domani andrò a scuola”.

Due proposizioni semplici possono essere legate da **connettivi logici** che servono per formulare proposizioni più complesse, dette **proposizioni composte**. Pertanto una proposizione composta è un insieme di due o più proposizioni semplici legate da connettivi logici.

I connettivi logici sono i seguenti:

- la negazione “non”;
- la congiunzione “e”;
- la disgiunzione inclusiva “o”;
- la disgiunzione esclusiva “o... o...”;
- l’implicazione materiale “se... allora...”;
- la doppia implicazione “... se e solo se...”.

Esempi 1) Si consideri la proposizione $A =$ “L’insieme dei numeri naturali contiene infiniti elementi”. Mediante il connettivo logico “non” si può costruire la proposizione “non A ” che consiste nel negare quanto affermato dalla proposizione A . Pertanto “non A ” corrisponde a “L’insieme dei numeri naturali **non** contiene infiniti elementi”. Di quest’ultima proposizione si può stabilire la verità: essa è falsa.

2) Si considerino le due proposizioni semplici $A =$ “Il triangolo è una figura piana” e $B =$ “Il triangolo ha tre lati”. Mediante il connettivo logico “e” si può formulare una proposizione composta “ A e B ”, ossia “Il triangolo è una figura piana e il triangolo ha tre lati”. Di quest’ultima proposizione si può stabilire la verità: essa è vera.

3) Si considerino le due proposizioni semplici $A =$ “4 è maggiore di 2” e $B =$ “4 è minore o uguale a 2”. Mediante il connettivo logico “o... o...” si può formulare una proposizione composta “o A o B ”, ossia “o 4

è maggiore di 2 o 4 è minore o uguale a 2”. Di quest’ultima proposizione si può stabilire la verità: essa è vera.

6.2. La negazione “non”

La negazione “non” viene indicata con un trattino sopra la lettera che indica la proposizione; pertanto, considerata la proposizione A , la proposizione “non A ” sarà indicata con \bar{A} .

Per il connettivo “non” vale la seguente regola:

- se la proposizione A è vera, allora la proposizione \bar{A} è falsa;
- se la proposizione A è falsa, allora la proposizione \bar{A} è vera.

Per descrivere schematicamente la regola appena esposta si usa la **tabella di verità** (Tabella 6-1). In essa vengono riportate le due alternative relative alla proposizione A (se essa è vera oppure è falsa) ed i corrispondenti valori di verità della proposizione \bar{A} .

Tabella 6-1

A	\bar{A}
V	F
F	V

Esempi 1) Sia A = “La retta ha infiniti punti”. Tale proposizione è vera. La sua negazione (\bar{A}) è una proposizione falsa: \bar{A} = “La retta non ha infiniti punti”.

2) Sia B = “100 è divisibile per 3”. Tale proposizione è falsa. La sua negazione (\bar{B}) è una proposizione vera: = “100 non è divisibile per 3”.

3) Si consideri la proposizione C = “Mario frequenta le scuole elementari” e si supponga che tale proposizione sia falsa. La negazione di C può essere formulata nel modo seguente: \bar{C} = “Mario non frequenta le scuole elementari”; si sa inoltre che tale proposizione è vera. Si ponga attenzione al fatto che la negazione di C non può essere, ad esempio, la frase “Mario frequenta le scuole medie”, in quanto questa proposizione

non è la stessa cosa che dire “Mario non frequenta le scuole elementari”. Difatti affermare che Mario non frequenta le elementari potrebbe voler dire che Mario frequenta le medie oppure che frequenta le superiori. In effetti la frase “Mario non frequenta le scuole elementari” tiene aperte tutte le altre possibilità. Si ricordi inoltre che se la proposizione C = “Mario frequenta le scuole elementari” è falsa, allora la sua negazione dovrebbe essere vera; nessuno, però, può garantire che la proposizione “Mario frequenta le scuole medie”, in quanto negazione della proposizione C , sia necessariamente vera: essa potrebbe essere falsa in quanto Mario frequenta le superiori. Pertanto è bene aver presente che la negazione di una proposizione non si ottiene riformulando la proposizione con un’alternativa differente da quanto affermato: l’unico modo di negare una proposizione è inserire in essa il connettivo “non”.

6.3. La congiunzione “e”

La congiunzione “e” viene indicata con il simbolo \wedge ; pertanto considerate le proposizioni A e B , la proposizione “ A e B ” sarà indicata con $A \wedge B$.

Per il connettivo “e” vale la seguente regola:

Se le proposizioni A e B sono vere, allora la proposizione $A \wedge B$ è vera; in tutti gli altri casi la proposizione $A \wedge B$ è falsa.

Quindi l’unico caso in cui la proposizione $A \wedge B$ è vera si ha quando sono vere sia A che B . Questo è mostrato anche nella tabella di verità (Tabella 6-2). Si noti che i casi possibili in relazione al valore di verità delle proposizioni A e B sono quattro.

Tabella 6-2

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Test di verifica

Quesiti a risposta multipla

1) La somma di due numeri consecutivi è pari alla metà del primo numero aumentato di 10. Quanto vale il secondo numero?

- a) $x = 6$
- b) $x = 5$
- c) $x = 0$
- d) $x = 7$

2) Un numero x è tale che il suo doppio è pari ai due terzi del numero aumentato di 6. Quanto vale x ?

- a) $x = 12$
- b) $x = 3$
- c) $x = 18$
- d) $x = \frac{9}{2}$

3) $2(x+1) + 1 - (x+3) = x$

- a) $x = 1/2$
- b) impossibile
- c) $x = -3$
- d) indeterminata

4) Il peso di un mattone è uguale al peso di mezzo mattone più un kg. Quanto pesa il mattone?

- a) 1 kg
- b) mezzo kg

- c) 2 kg e mezzo
- d) 2 kg

5) Esiste un numero intero (appartenente all'insieme Z) tale che il suo triplo è pari alla metà del numero aumentata di 8?

- a) $x = 2$
- b) x non esiste (impossibile)
- c) $x = -13$
- d) $x = \frac{16}{5}$

6) La somma di due numeri è pari a 24. Il triplo del primo numero è pari al secondo. Qual è il numero più piccolo?

- a) 12
- b) 4
- c) 3
- d) 6

7) $2(x-2) + x^2 = x(x+2) + 4$

- a) $x = -2$
- b) indeterminata
- c) impossibile
- d) $x = 2$

$$8) \frac{1}{3}(3x-1) = -2(x+2)+1$$

$$a) x = -\frac{8}{9}$$

$$b) x = 8$$

$$c) x = \frac{16}{9}$$

$$d) x = \frac{2}{9}$$

9) Si consideri l'equazione di primo grado $ax = b$ dove $a = 0$ e $b \neq 0$. L'equazione è:

- a) determinata e $x = 0$
- b) indeterminata
- c) impossibile
- d) determinata e $x \neq 0$

10) Si consideri l'equazione di primo grado $ax = b$ dove $a \neq 0$ e $b = 0$. L'equazione è:

- a) determinata e $x = 0$
- b) indeterminata
- c) impossibile
- d) determinata e $x \neq 0$

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni di primo grado.

$$1) (x-1)(x^2+x+1) - (x^2-4) = x^3 - 1 - (x-2)(x+2)$$

$$2) x(x-1) + (3x-4)(2+x) = (2x-1)^2 - \frac{3}{2}x(2x-1) - 1 + 3(x+1)^2$$

$$3) 3 \left[\frac{1}{2}(2x-1) - (x-4) \right] - \left[4(x+1) - \frac{1}{2}(1-x) \right] = \frac{x}{2}$$

$$4) -(4x-5)(x-1) + 4x^2 = 2x - (x+3)(1-x) - 3(x+1) - x^2$$

Matematica | 1

Il volume si rivolge a quanti abbiano la necessità di apprendere o rivedere in breve tempo i concetti basilari delle operazioni negli insiemi numerici, del calcolo letterale e della geometria euclidea.

La trattazione sintetica non impedisce di approfondire sia la parte teorica, con le dimostrazioni degli asserti, sia la parte applicativa, con lo sviluppo di numerosi esempi di esercizi svolti e la presentazione di diverse tipologie di verifica alla fine di ogni capitolo.

Tra gli argomenti trattati:

- insiemistica
- operazioni negli insiemi numerici
- sistemi di numerazione
- logica delle proposizioni
- monomi e polinomi
- frazioni algebriche
- equazioni e sistemi di equazioni di primo grado
- fondamenti della geometria euclidea

L'autore

Emiliano Barbuto, dirigente scolastico, già docente di matematica e fisica nei licei e ricercatore a contratto presso l'Università di Salerno, ha collaborato ad esperimenti di fisica nucleare e subnucleare presso il CERN di Ginevra e i Laboratori del Gran Sasso. È autore di numerose pubblicazioni di carattere didattico e divulgativo sulla matematica e sulla logica.



www.edises.it
info@edises.it



€ 9,50

ISBN 978-88-9362-173-1



9 788893 621731